Introduction

La mécanique est l’étude des mouvements des déformations et des états d’équilibres de système physiques.

La cinématique est l’étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent.

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie un mouvement à partir des forces.

Avant de débuter l’étude dynamique d’un système au chapitre suivant ,il faut passer par les étapes ci-dessous :

Définir le système étudié → Choisir le référentiel → Faire le bilan des forces → Préciser les conditions Initiales

Dans ce qui suit nous allons aborder la cinématique pour apprendre à décrire et caractériser un mouvement.

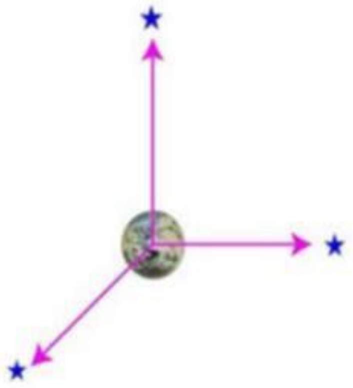
1) Description des mouvement

La notion de relativité du mouvement vue en classe de seconde montre la nécessité de choisir un solide de référence ou référentiel avant une étude cinématique ou dynamique.

Un référentiel est donc un solide de référence.

Exemples de référentiels :

Terrestre, laboratoire, géocentrique, héliocentrique…



Le référentiel géocentrique est un solide virtuel :
Centre de la terre + trois étoiles lointaines.

Exercice :

Pour chacune des situations suivantes, choisir le référentiel d'étude le plus adapté compte tenu du système :

a. Terre tournant autour du Soleil ;
b. satellite artificiel terrestre ;
c. cycliste roulant sur une route ;
d. Io en rotation autour de Jupiter.

Vecteur position

Vecteur vitesse
dérivée du vecteur position

Vecteur accélération
dérivée du vecteur vitesse

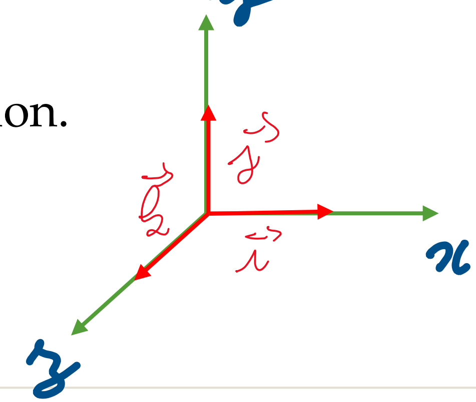
primitive ⟷ dérivée

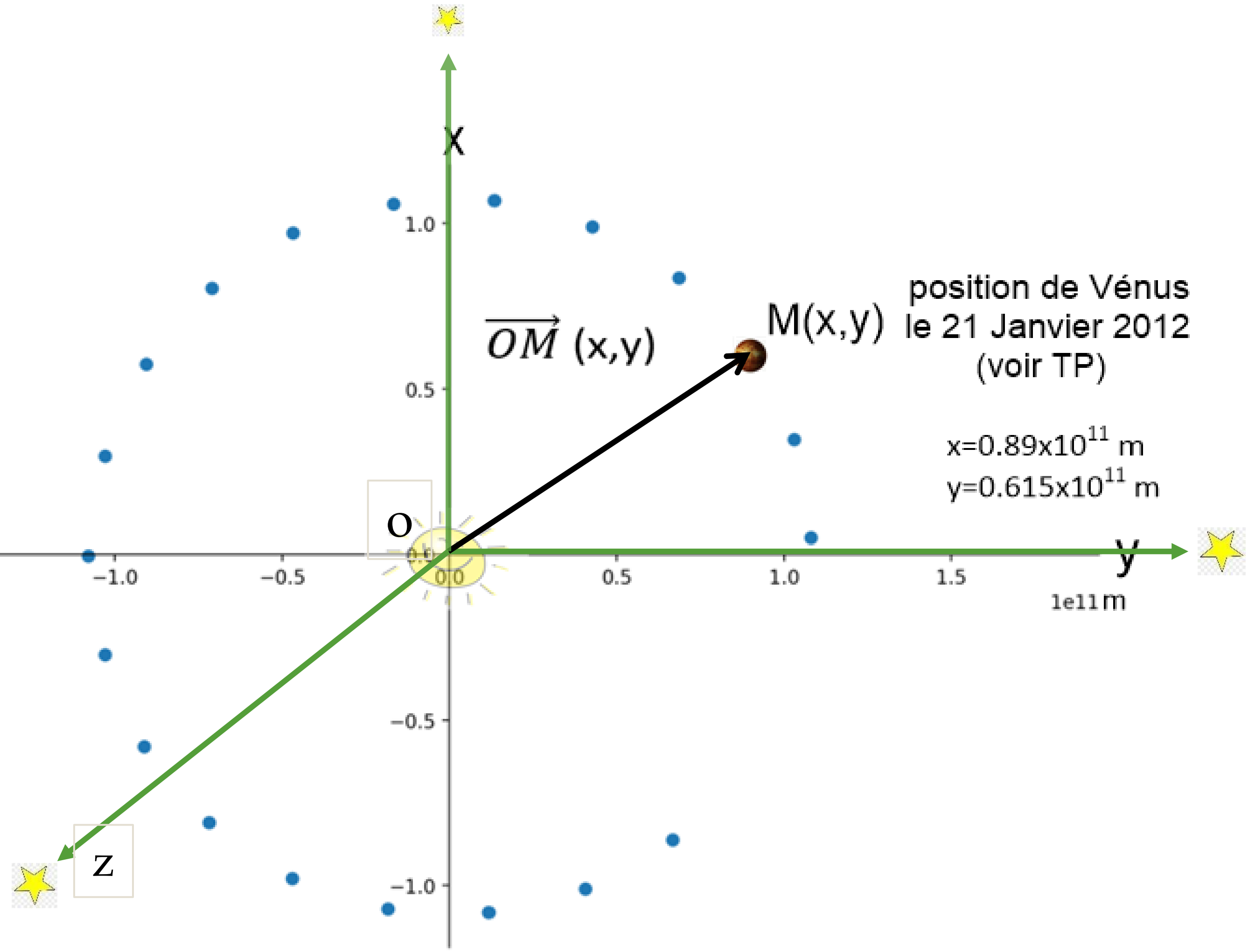
Fonction f de la variable x $y=f(x)$	**Dérivée de la fonction f $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$**
Constante c	$\frac{dy}{dx} = 0$
a et b deux constantes $y=a.x+b$	$\frac{dy}{dx} = a$
a et b et c trois constantes $y=a.x^2+b.x+c$	$\frac{dy}{dx} = 2a.x+b$

1-1) Le vecteur position

La position de Venus à un instant donné est connue par sa position dans un repère bien défini associé au référentiel d'étude choisi.
Le point M a pour coordonnées x et y qui dépendent du temps : x(t) et y(t)
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur position.
Dans l'espace il faudrait ajouter une troisième coordonnée
x,y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M
M(x,y,z) et $\overrightarrow{OM}$(x,y,z)
$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position.
On peut aussi écrire :

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$





Exercice 1 :

« L'homme-canon » est un spectacle de foire, qui consiste à propulser d'un canon un homme convenablement protégé, par la brutale détente d'un ressort comprimé. Lors d'un spectacle, les équations horaires de l'homme-canon modélisé par un point matériel M dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel d'étude sont :

$$x = 20\,t; \qquad y = -4{,}9\,t^2 + 20\,t + 2{,}5; \qquad z = 0$$

$\vec{j}$ est vertical ; $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont horizontaux.

Les coordonnées sont exprimées en mètre et les dates en seconde.

1. La trajectoire est plane. Justifier cette affirmation.

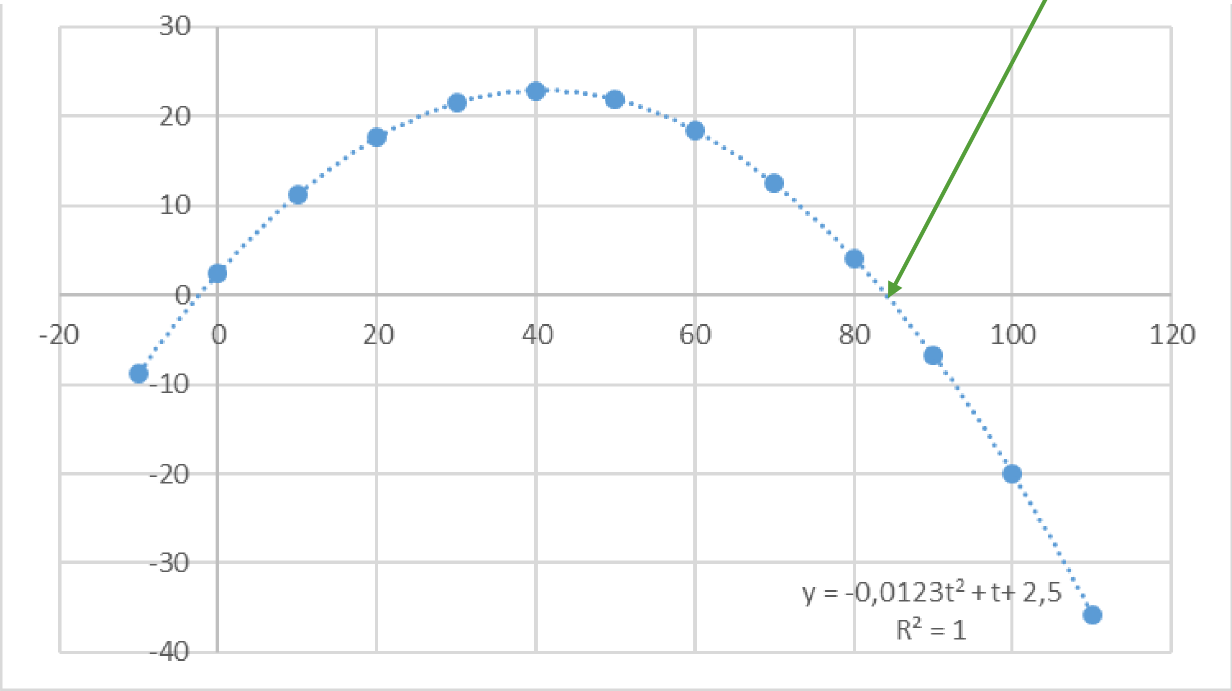
2. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer les coordonnées du point M toutes les 0,5 seconde, de 0 à 4 s. Représenter ces positions.

3. Déterminer graphiquement à quelle distance du canon il faut placer le matelas de réception.

1- L'équation horaire z=0 sous entend :
z(t)=0 quel que soit t
La trajectoire est donc plane et se situe dans le plan xoy

2-

t	x(t)	y(t)
-0,5	-10	-8,725
0	0	2,5
0,5	10	11,275
1	20	17,6
1,5	30	21,475
2	40	22,9
2,5	50	21,875
3	60	18,4
3,5	70	12,475
4	80	4,1



3-Il faut placer le matelas à une distance d du canon (en O) égale à l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
d=84m

1-2) Le vecteur vitesse

Dans le cas d'un point matériel ou d'un solide confondu avec son centre de gravité G

Le plus souvent lorsque le mouvement est plan :

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OG} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \qquad \text{on écrit : } \overrightarrow{V_G}\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_G}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad ;$$

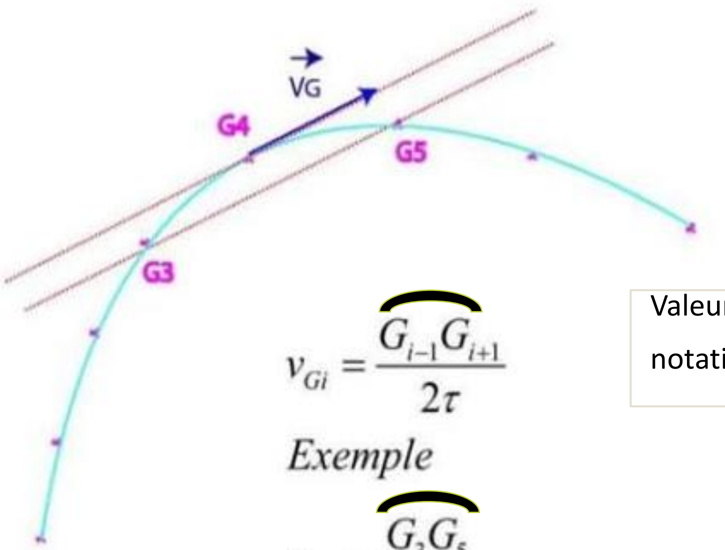
$v_x = \frac{dx}{dt}$; v_x est la vitesse selon Ox

$v_y = \frac{dy}{dt}$; v_y est la vitesse selon Oy

La vitesse v est la norme du vecteur vitesse

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{V_G}$ est tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement.



Détermination de la valeur approchée d'une vitesse instantanée.

τ durée constante entre deux enregistrements

$$v_{Gi} = \frac{\overset{\frown}{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}$$

Exemple

$$v_{G4} = \frac{\overset{\frown}{G_3G_5}}{2\tau}$$

Valeur approchée plus conforme à la notation mathématique

$$V_{Gi} = \frac{\overset{\frown}{G_iG_{i+1}}}{2\tau}$$

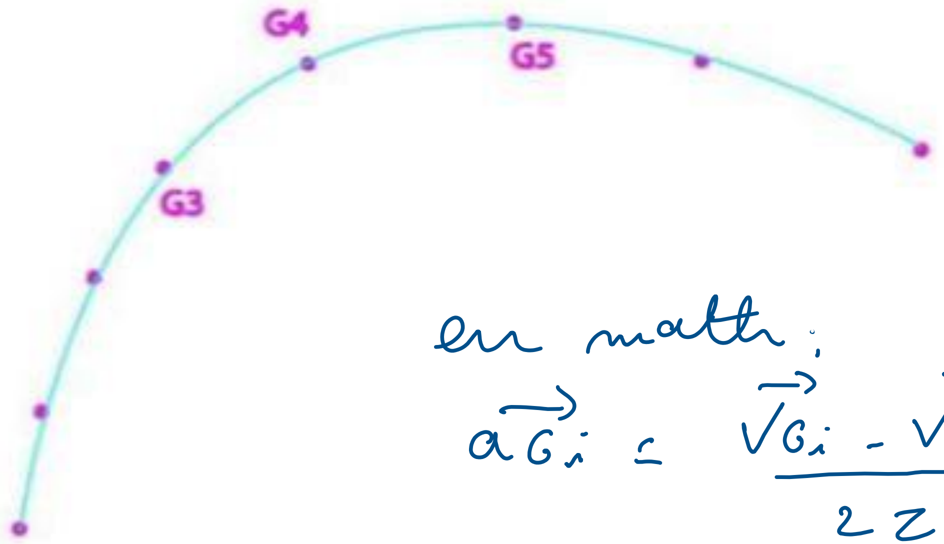
La longueur est mesurée sur la courbe(trajectoire) et non pas sur l'arc

1-3) Le vecteur accélération

Si le mouvement est plan :

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$$



en math :

$$\overrightarrow{aG_i} = \frac{\overrightarrow{VG_i} - \overrightarrow{VG_{i+1}}}{2\tau}$$

Unité de l'accélération : $m.s^{-2}$

$$\overrightarrow{a_{Gi}} = \frac{\overrightarrow{v_{G_{i+1}}} - \overrightarrow{v_{G_{i-1}}}}{2\tau}$$

(approché

« L'homme-canon » est un spectacle de foire, qui consiste à propulser d'un canon un homme convenablement protégé, par la brutale détente d'un ressort comprimé. Lors d'un spectacle, les équations horaires de l'homme-canon modélisé par un point matériel M dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel d'étude sont :

$$x = 20\,t; \qquad y = -4{,}9\,t^2 + 20\,t + 2{,}5; \qquad z = 0$$

$\vec{j}$ est vertical ; $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont horizontaux.

Les coordonnées sont exprimées en mètre et les dates en seconde.

1. La trajectoire est plane. Justifier cette affirmation.
2. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer les coordonnées du point M toutes les 0,5 seconde, de 0 à 4 s. Représenter ces positions.
3. Déterminer graphiquement à quelle distance du canon il faut placer le matelas de réception.

Exercice 2

1. À partir des données de l'exercice précédent, calculer les coordonnées v_x et v_y du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M à chaque instant.
2. Quelle est la valeur du vecteur vitesse $\vec{v_1}$ à $t_1 = 1$ s ?
3. Exprimer les coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération $\vec{a}$ du point M à chaque instant.
4. Que peut-on dire de l'évolution de la valeur du vecteur $\vec{a}$ au cours du temps ? Qualifier ce mouvement.

t	x(t)	y(t)	vx	vy	ax	ay	a
-0,5	-10	-8,725	20	24,9	0	-9,8	9,8
0	0	2,5	20	20	0	-9,8	9,8
0,5	10	11,275	20	15,1	0	-9,8	9,8
1	20	17,6	20	10,2	0	-9,8	9,8
1,5	30	21,475	20	5,3	0	-9,8	9,8
2	40	22,9	20	0,4	0	-9,8	9,8
2,5	50	21,875	20	-4,5	0	-9,8	9,8
3	60	18,4	20	-9,4	0	-9,8	9,8
3,5	70	12,475	20	-14,3	0	-9,8	9,8

1-

Vx est la dérivée de x(t)

x(t)=20.t

d'où Vx(t)=20

Vy est la dérivée de y(t)

y(t)=-4,9.t^2+20t+2,5

d'où Vy(t)=-9,8t+20

ax est la dérivée de Vx

2-

Pour t=1s

$\overrightarrow{V_1}$ a pour coordonnées : Vx=20 et Vy=15.1

$$V_1 = \sqrt{20^2 + 15.1^2}$$

$$V_1 = 25.1 m/s$$

3-

ax est la dérivée de Vx

d'où ax(t)=0

ay est la dérivée de Vy

d'où ay(t)=-9.8

a est la norme du vecteur $\overrightarrow{a}(ax, ay)$

$$a = \sqrt{ax^2 + ay^2}$$

a=9.8m.s^{-2}

ax=0 et ay=-9.8 quel que soit t

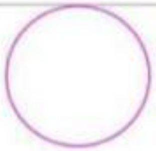
Le vecteur accélération est constant.

Le mouvement est donc uniformément varié.

Il est uniformément retardé pendant la phase de montée et uniformément accéléré pendant la phase de descente.

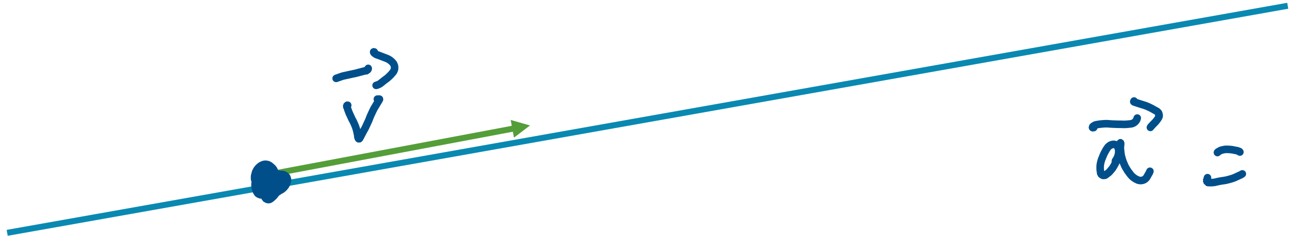
2) Caractérisation de quelques mouvements

La trajectoire est la courbe dans l’espace, formée par l’ensemble des positions successives du centre d’inertie G du système au cours du mouvement.

	trajectoire	*mouvement*
	*droite*	*rectiligne*
	*Cercle* (ou une partie du cercle)	*circulaire*
	*courbe*	*curviligne*

2-1) Le mouvement rectiligne

Un mouvement est **rectiligne** si sa trajectoire est une **droite**.
Un mouvement est uniforme si la vitesse est constante.
Le mouvement est **rectiligne uniforme** si la trajectoire est une droite et la vitesse constante.
Dans ce cas le vecteur vitesse est constant et le **vecteur accélération** est **nul**.



$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ car $\vec{v} = \vec{cste}$

Enfin on parle de **mouvement rectiligne uniformément accéléré** si la trajectoire est une droite et le vecteur accélération constant et non nul.

Cinématique du point

Introduction

1) Description des mouvement

1-2) Le vecteur vitesse

1-1) Le vecteur position

1-3) Le vecteur accélération

2) Caractérisation de quelques mouvements

2-1) Le mouvement rectiligne

2-2) Le mouvement circulaire

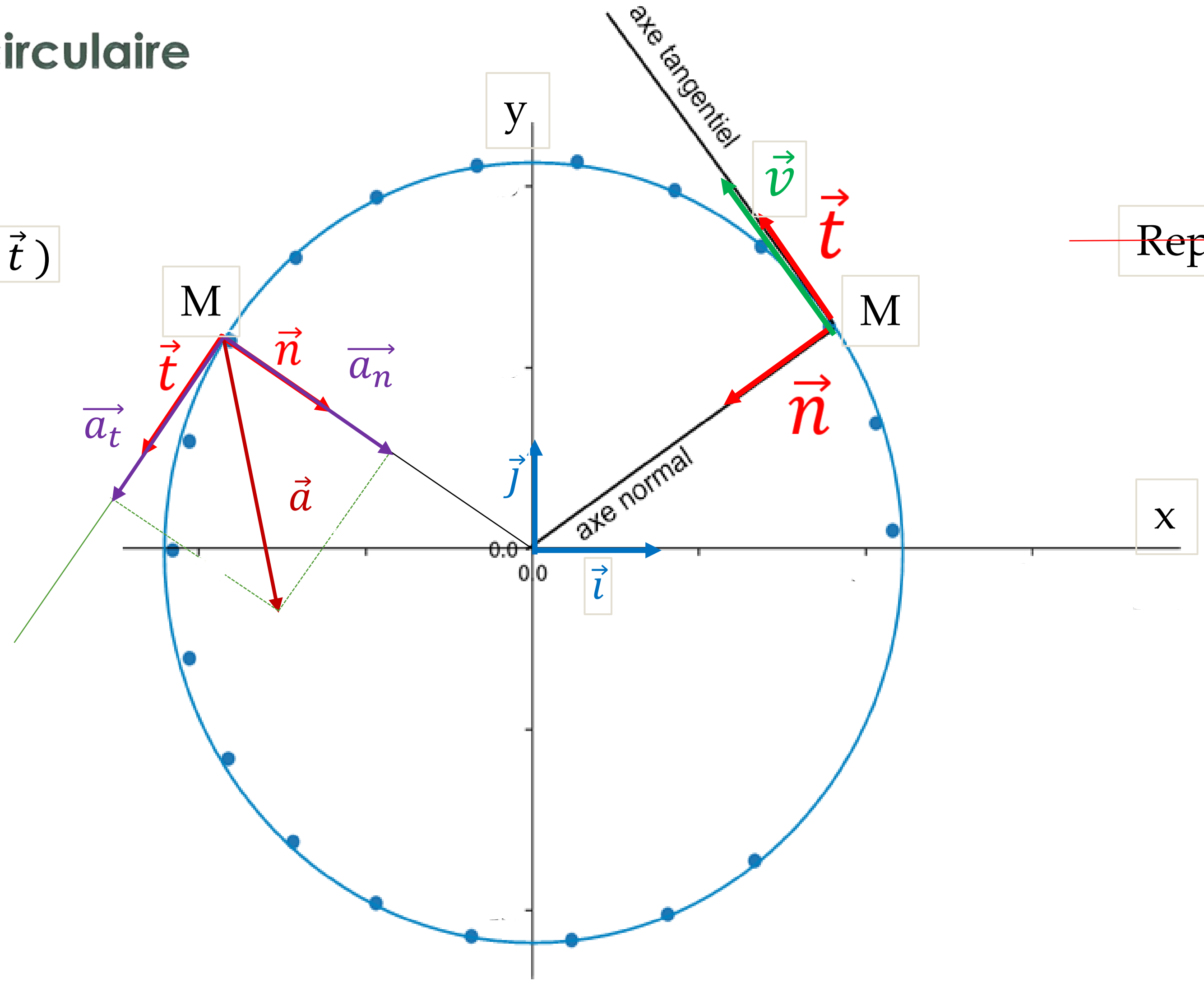
2-2) Le mouvement circulaire

Repère de Frenet $(M, \vec{n}, \vec{t})$

$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$

$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{t}$

$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$



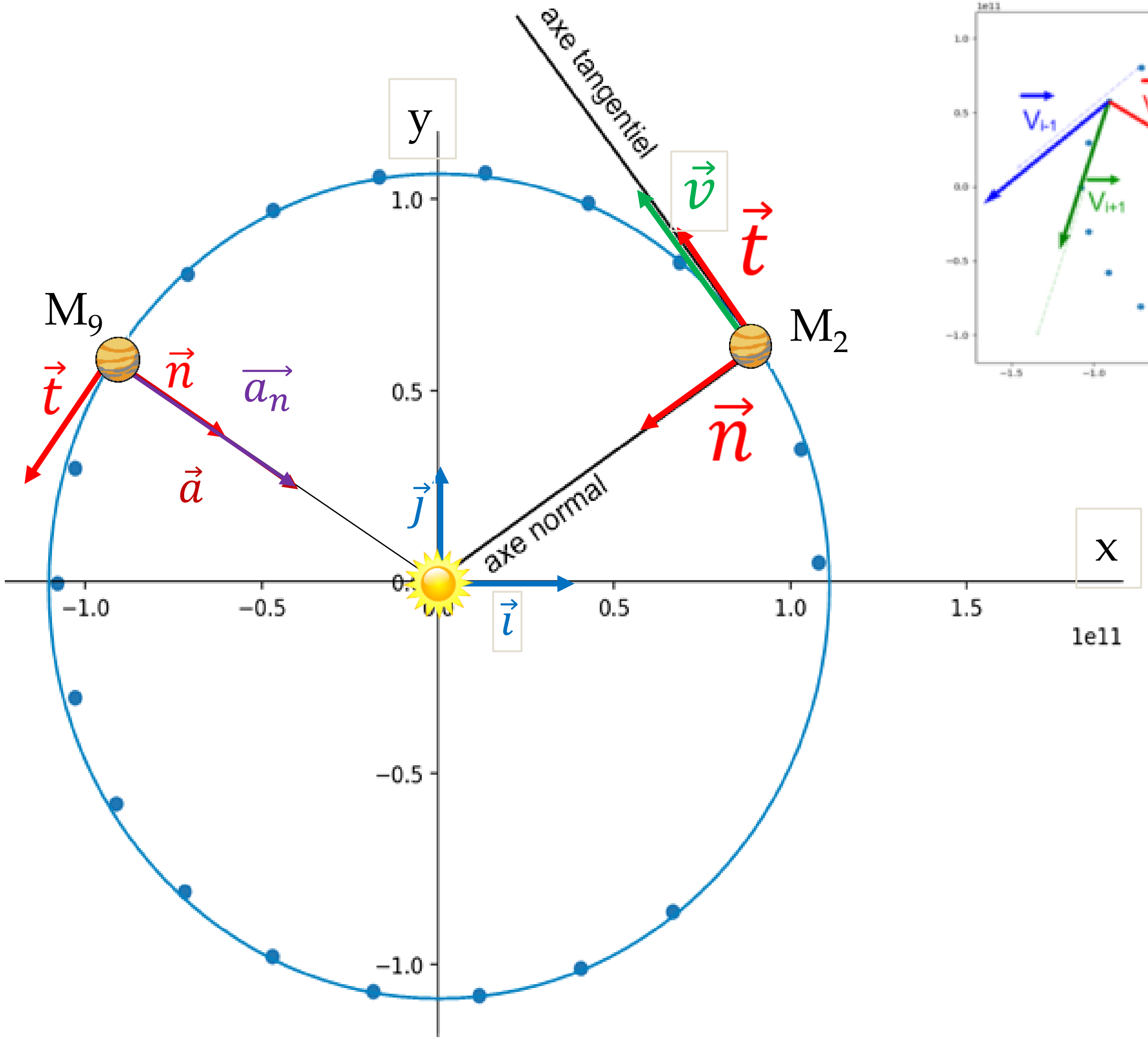
~~Repère cartésien~~ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

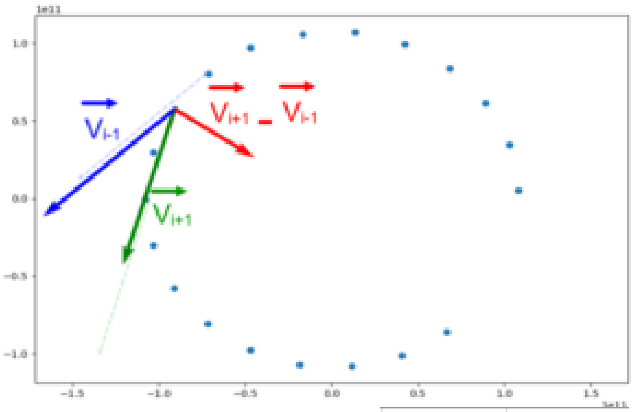
mouvement circulaire uniforme

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{t} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}}$$





a	v²/R
0,0111	0,0111
0,0110	0,0111
0,0112	0,0111
0,0112	0,0111
0,0110	0,0116
0,0114	0,0112
0,0113	0,0109
0,0107	0,0112
0,0111	0,0113
0,0114	0,0112
0,0109	0,0112
0,0110	0,0110
0,0111	0,0110
0,0110	0,0109
0,0109	0,0109
0,0108	0,0108

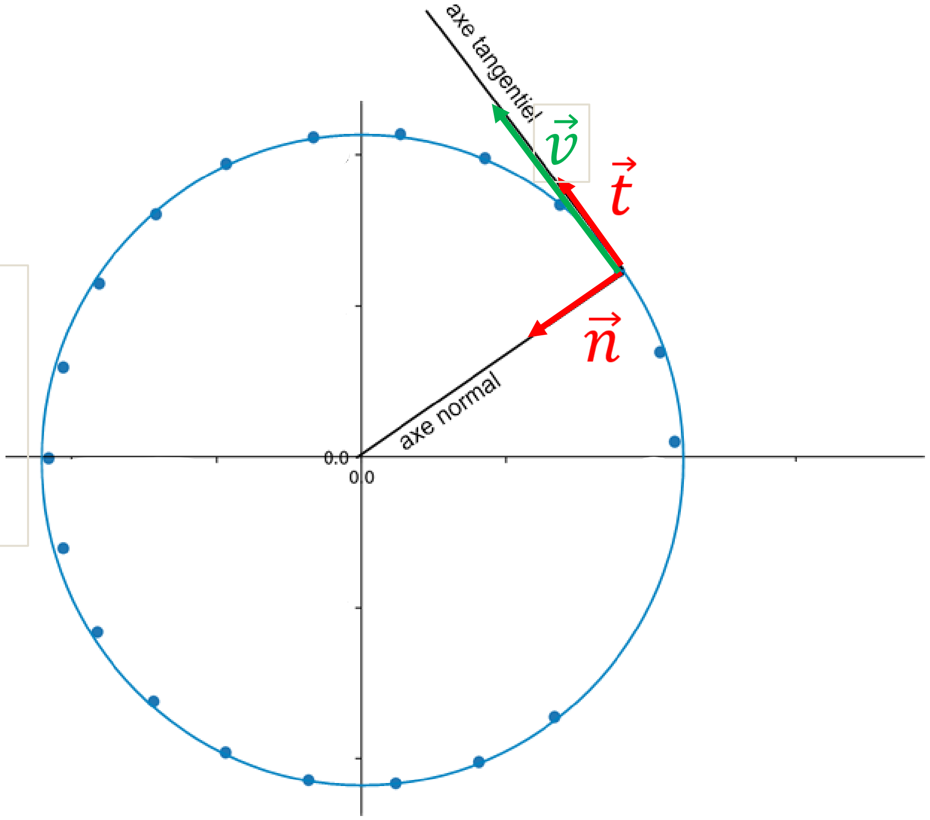
Le repère cartésien n'est pas adapté pour l'étude d'un mouvement circulaire .On lui préfère le repère de Frenet.

Le repère de Frenet est défini par les deux vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{t}$

$\vec{t}$ est le vecteur tangentiel , tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement.

$\vec{n}$ est le vecteur normal (radial) , orthogonal à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle.

Pour un mouvement circulaire de rayon R



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{t}$$ Accélération tangentielle

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$ Accélération normale

Si le mouvement circulaire est uniforme comme dans le cas de Vénus(voir TP) :

L'accélération tangentielle est nulle. Dans ce cas l'accélération est normale (centripète) et a pour valeur $\frac{v^2}{R}$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$