Corrigés : les lois de Kepler

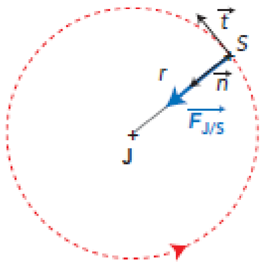
Exercice 22 page 177 et 25 page 178

22 Quelle est la masse de Jupiter ?

1. a. La force de gravitation exercée par Jupiter de masse M sur le satellite de masse m est :

$$\overrightarrow{F_{J/S}} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{n}$$

b. Schématisation de la force $\overrightarrow{F_{J/S}}$:



2. Système : {satellite} et référentiel jupitocentrique.
Bilan des forces extérieures s'exerçant sur le satellite : la force $\overrightarrow{F_{J/S}}$ de gravitation exercée par Jupiter.
L'application de la deuxième loi de Newton conduit à :

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_{J/S}}}{m}$$

Il vient :

$$\vec{a} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}}{m} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{a} = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{n}$$

En identifiant cette expression à $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$, on en déduit :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M}{r^2} \end{cases}$$

L'égalité $\frac{dv}{dt} = 0$ entraîne que la valeur de la vitesse v du satellite est constante. Ce mouvement circulaire est donc uniforme et $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$.

3. La valeur de la vitesse du satellite est indépendante de sa masse et elle est d'autant plus grande que le rayon de l'orbite est petit. Le satellite le plus rapide est celui qui est le plus proche de Jupiter.

4. La période de révolution est la durée mise par le satellite pour décrire sa trajectoire circulaire à la vitesse de valeur v constante :

$$2\pi r = v \cdot T$$

soit : $$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

5. a. La représentation graphique proposée est une droite passant par l'origine, donc le carré de la période est proportionnel au cube de la distance entre les centres, soit $T^2 = k \cdot r^3$, k étant le coefficient directeur de la droite.
On retrouve la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire : $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$.

b. Le résultat de la question 4 permet d'écrire :

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{G \cdot M} \quad \text{ou} \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G \cdot M}$$

En comparant avec le résultat de la question 5a, il vient : $$k = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

soit : $$M = \frac{4\pi^2}{G \cdot k}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}1 \times 10^{-16}}$$

$$M = 1{,}9 \times 10^{27} \text{ kg.}$$

25 Le cercle des planètes disparues

1. Le carré de la période de révolution T d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique : $\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$.

2. On applique la troisième loi de Kepler à Pluton et Éris évoluant autour du Soleil :

$$\frac{T_É^2}{a_É^3} = \frac{T_P^2}{a_P^3}$$

soit : $$\frac{T_É^2}{T_P^2} = \frac{a_É^3}{a_P^3}$$

Or : $T_É (= 557 \text{ ans}) > T_P (= 248 \text{ ans})$

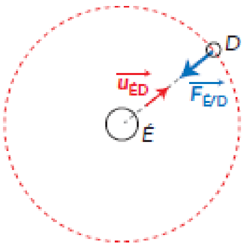
donc : $$\frac{T_É^2}{T_P^2} > 1$$

alors : $$\frac{a_É^3}{a_P^3} > 1 \quad \text{ou} \quad a_É^3 > a_P^3$$

$a_É > a_P$: l'orbite d'Éris se situe au-delà de celle de Pluton.

3. On utilisera un référentiel dont le centre est confondu avec le centre de gravité d'Éris et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes. On pourrait parler de référentiel « ériscentrique ». Ce référentiel est considéré comme galiléen.

4. a. On considère le mouvement circulaire uniforme de Dysnomia dans le référentiel « ériscentrique ». Le satellite Dysnomia est soumis, en première approximation, à une unique force d'attraction gravitationnelle exercée par Éris, $\overrightarrow{F_{É/D}}$.



On applique la deuxième loi de Newton à Dysnomia, M_D étant constante :

$$\overrightarrow{F_{É/D}} = M_D \cdot \vec{a}$$

$$M_D \cdot \vec{a} = -G \cdot \frac{M_É \cdot M_D}{R_D^2} \cdot \overrightarrow{u_{ÉD}}$$

d'où : $$\vec{a} = -G \cdot \frac{M_É}{R_D^2} \cdot \overrightarrow{u_{ÉD}}.$$

b. Le vecteur accélération est porté par le rayon de la trajectoire (il est **radial**) et est orienté vers le centre de la trajectoire (il est **centripète**).

5. a. La période de révolution T_D de Dysnomia est la durée pendant laquelle Dysnomia effectue un tour (distance parcourue : $2\pi \cdot R_D$).

Sa vitesse est $v = \frac{2\pi \cdot R_D}{T_D}$

Soit : $$T_D = \frac{2\pi \cdot R_D}{v} \quad (1)$$

Le mouvement de Dysnomia est circulaire et uniforme, l'accélération est centripète, de valeur :

$$a = \frac{v^2}{R_D}$$

En comparant avec l'expression de la question 4a :

$$\frac{v^2}{R_D} = G \cdot \frac{M_É}{R_D^2}$$

soit : $$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_É}{R_D^3}}$$

En reportant dans l'expression (1), on obtient :

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{R_D^3}{G \cdot M_É}}$$

En élevant cette relation au carré, on retrouve la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_D^2}{R_D^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_É} = \text{cte}$$

car G et $M_É$ sont constantes.

b. D'après la troisième loi de Kepler, on a :

$$G \cdot M_É = \frac{4\pi^2 \cdot R_D^3}{T_D^2}$$

soit : $$M_É = \frac{4\pi^2 \cdot R_D^3}{G \cdot T_D^2}$$

$$M_É = \frac{4\pi^2 \times (3{,}60 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (1{,}30 \times 10^6)^2} = 1{,}63 \times 10^{22} \text{ kg}.$$

6. $$\frac{M_É}{M_P} = \frac{1{,}63 \times 10^{22}}{1{,}3 \times 10^{22}} = 1{,}24$$

La masse d'Éris est un peu plus grande que celle de Pluton.

Si Éris n'est pas considérée comme une planète, alors Pluton, qui a une masse moins importante que celle d'Éris, ne l'est pas non plus. Éris et Pluton sont en fait des représentants des « planètes naines ».