Exercice 1

Un objet métallique est retiré d'un four à 300°C et est laissé dans une pièce à température ambiante constante de 20°C. La température T de l'objet en fonction du temps t suit la loi de refroidissement de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Où :

- T est la température de l'objet (en degrés Celsius),
- T_a est la température ambiante (en degrés Celsius),
- k est une constante de refroidissement positive (en temps inverse).

Si au bout de 10 minutes, la température de l'objet est de 100°C, et après 30 minutes, elle est de 50°C, déterminez la constante de refroidissement k et la température initiale de l'objet.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

avec $T_a = 20°C$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a$$

Solution

$$T(t) = T_a + Ae^{-kt}$$

On cherche k et A

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

solution générale

$$T(t) = Ae^{-kt}$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a$$

solution particulière le régime permanent $T = \text{cste}$

$0 + kT = kT_a$ d'où $\boxed{T = T_a}$

$$A = (T - T_a)e^{kt}$$

Pour $t_1 = 10$ min $T_1 = 100°C$

$t_2 = 30$ min $T_2 = 50°C$

On a donc $(T_1 - T_a)e^{kt_1} = (T_2 - T_a)e^{kt_2}$

$$e^{k(t_1 - t_2)} = \frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}$$

$$k = \frac{1}{t_1 - t_2} \ln\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)$$

Application numérique $k = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{30}{80}\right)$

$k = 0{,}049 \text{ min}^{-1}$

d'où $A = (T_1 - T_a)e^{kt_1} = 80\,e^{0{,}049 \times 10} = 130°C$

$T_i = T(0) = T_a + Ae^0 = T_a + A = 130 + 20 = 150°C$

Exercice 2

Considérons une réaction chimique d'ordre 1 où le réactif A se transforme en produit B avec une constante de vitesse $k = 0.02\ \text{min}^{-1}$. Au début de la réaction, la concentration initiale du réactif A est de $[A]_0 = 2$ mol/L.

1. Écrivez l'équation différentielle décrivant la cinétique de cette réaction chimique.
2. Trouvez une expression pour la concentration de A en fonction du temps t.
3. Calculez le temps nécessaire pour que la concentration de A atteigne la moitié de sa valeur initiale.

1°) $A \rightarrow B$ $\quad k = 0{,}02\ \text{min}^{-1}$

$[A]_0 = 2$ mol/L

réaction d'ordre 1

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

2°)
$$\frac{d[A]}{dt} + k[A] = 0$$

solution $[A](t) = [A]_0\, e^{-kt}$

3°) On cherche t tel que $[A](t) = \frac{[A]_0}{2}$

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0\, e^{-kt}$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2}$$

$$-kt = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{k} \simeq \frac{\ln(2)}{0{,}02} = 35\ \text{min}$$

Exercice 3

Considérons un isotope radioactif utilisé en médecine avec une période radioactive de 2 heures. Au départ, nous avons 100 mg de cet isotope.

1. Écrivez l'équation différentielle décrivant la décroissance radioactive de cet isotope.
2. Trouvez une expression pour la quantité d'isotope restant en fonction du temps.
3. Calculez la quantité d'isotope restant après 6 heures.

Exercice 3

100 g | 2 h | 50 g | 2 h | 25 g | 2 h | 12,5 g

$T = 2\,h$ $\qquad m_0 = 100\,mg$

soit N_0 noyaux

et $N(t)$ à l'instant T

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \text{avec } \lambda = \frac{\ln(2)}{T}$$

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 \qquad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On ne connait pas l'isotope. On va donc déterminer la fraction de noyaux restants $\frac{N(t)}{N_0}$

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{m(t)}{m_0}$$

$$m(t) = m_0 \frac{N(t)}{N_0} = m_0 e^{-\lambda t}$$

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Pour $t = 6\,h$

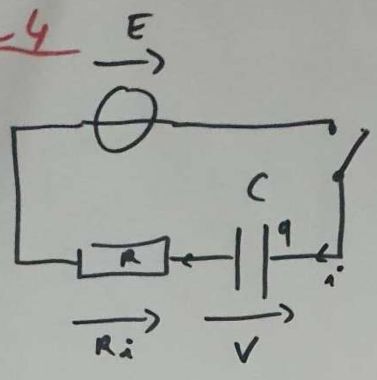
$$m = m_0 e^{-\frac{\ln(2)}{2} 6} = m_0 e^{-3\ln(2)}$$

$$= \frac{m_0}{2^3} = \frac{m_0}{8} = 12{,}5\,mg$$

Exercice 4

Un circuit RC a une résistance R = 100 ohms et un condensateur C = 0.1 farads. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur suit une évolution décrite par l'équation différentielle : $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = E$, où E = 12 volts est la tension de la source. Résoudre cette équation pour trouver l'expression de V en fonction du temps.

Exercice 4



Loi des mailles

$Ri + V = E$

$i = C\frac{dV}{dt}$

$RC\frac{dV}{dt} + V = E$

$R = 100\,\Omega$

$C = 0{,}1\,F$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{E}{RC}$$

l'équation donnée par ChatGPT n'est pas homogène $\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{V/s} + \underbrace{\frac{1}{RC}V}_{V/s} = E \to V$

$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = 0$ $\qquad V_1(t) = A e^{-t/RC}$

$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC}V = \frac{E}{RC}$ $\qquad V_2(t) = E$ régime permanent

Solution générale $\quad V(t) = E + A e^{-t/RC}$

à $t = 0$ $\quad V = 0$ (condensateur déchargé)

$0 = E + A e^{0} = E + A = 0$ d'où $A = -E$

$V(t) = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

Exercice 1